Chapitre 13

Probabilités

Les probabilités sont la science dont l'objet est l'étude des phénomènes aléatoires. Elles sont apparues en France vers le milieu du XVIIe avec notamment Blaise Pascal (1623-1662) et Pierre de Fermat (1601-1665) qui ont correspondu à propos des jeux de hasard (hasard vient de l'arabe al zhar qui désigne un dé et qui se dit alea en latin). En 1933 le russe Andréï Kolmogorov (1903-1987) publie en allemand son manuel des *Fondements de la théorie des probabilités* dans lequel il présente son axiomatisation du calcul des probabilités.

La Théorie des probabilités est l'étude mathématique des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude.
En tant que fondement mathématique des statistiques, la théorie des probabilités est essentielle à la plupart des activités humaines qui nécessitent une analyse quantitative d'un grand nombre de mesures. Les méthodes de la théorie des probabilités s'appliquent également à la description de systèmes complexes dont on ne connaît qu'en partie l'état, comme en mécanique statistique. Une grande découverte de la physique du vingtième siècle fut la nature probabiliste de phénomènes physiques à une échelle microscopique, décrite par la mécanique quantique.

I. Expérience aléatoire et probabilité

1. Expérience, issue et univers.

Définition : Une expérience dont on ne peut prévoir le résultat est appelée une **expérience aléatoire** (ou **épreuve**).
Une expérience aléatoire conduit à une **issue** (ou **éventualité**).
Si n est le nombre d'issues possibles (ce nombre étant fini), on note $e_1, e_2, \dots, e_n$ ces issues et Ω l'ensemble de ces issues appelé aussi **l'univers,** l'ensemble des éventualités ; On a : $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$
On appelle **événement élémentaire** un singleton $\{e_i\}$. Par abus de langage on confond souvent une issue et un événement élémentaire (autrement dit e_i et $\{e_i\}$).

Exemples :

a) Une pièce est lancée. « Un lancé » est une expérience aléatoire qui conduit à deux issues possibles : pile ou face. Notons P (ou 1) pour pile et F (ou 0) pour face. $\Omega = \{"pile", "face"\}$ ou $\Omega = \{P, F\}$, ou encore $\Omega = \{0,1\}$.

b) On tire une boule placée dans une urne. « Un tirage » est une expérience. Suivant le contenu de l'urne il peut y avoir plusieurs univers : Si l'urne contient trois boule numérotées de 1 à 3 alors $\Omega = \{1, 2, 3\}$.
Si l'urne contient des boules rouges, bleues et vertes, que l'on nomme R, B et V alors $\Omega = \{R, B, V\}$, etc…

c) Une roue de loterie est tournée. « Un tirage de loterie » est une expérience. Suivant la roue, l'univers peut encore être différent : S'il y a des secteurs numérotés, l'univers sera l'ensemble de ces numéros. Si la roue a des couleurs différentes, l'univers sera l'ensemble de ces couleurs (souvent notées par leurs initiales), etc…

d) On tire une carte. « Un tirage » est une expérience. Si le jeu est complet (sans joker) l'univers est constitué de 52 cartes. Si l'on a enlevé les cartes de 2 à 6 il est de 32 cartes.

e) Un enfant naît, on s'intéresse à son sexe. « Une naissance » est une expérience aléatoire qui conduit aux issues : Garçon , fille. L'univers est $\Omega = \{"garçon", "fille"\}$ ou $\Omega = \{G, F\}$.

f) Un enfant naît, on s'intéresse à son groupe sanguin. « Une naissance » est une expérience aléatoire dont les issues possibles sont : A, B, O et AB. L'univers est $\Omega = \{A, B, O, AB\}$.

2. Probabilité

Définition : Si l'on considère une expérience aléatoire, à chaque événement élémentaire on peut lui associer un nombre appelé sa probabilité qui vérifie les conditions suivantes : ce nombre est compris entre 0 et 1 et la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
Si $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ on peut associer à chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ sa probabilité p_i telle que :

$$0 \le p_i \le 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Remarques :

1) On note aussi $p(\{e_i\})$ au lieu de p_i. Par abus de langage, on note souvent : $p(e_i)$.

2) Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit que l'on est dans une situation d'équiprobabilité. Par exemple un lancé de dé pour des raisons de symétrie a six issues possibles équiprobables. Si ce n'est pas le cas, le dé est dit « pipé » (ou « truqué »).

3) La probabilité d'un événement élémentaire peut être :

- calculée dans le cas discret en prenant le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles

$$p_i = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

- calculée dans le cas continu par un calcul géométrique par exemple en prenant le quotient de l'aire de la surface favorable par l'aire de la surface totale.

$$p_i = \frac{\text{longueur(aire ou volume) du segment (de la surface ou du solide) favorable}}{\text{longueur(aire ou volume) du segment (de la surface ou du solide) totale}}$$

- déduite de la stabilisation des fréquences après répétition d'un très grand nombre de fois cette expérience (la loi des grands nombres démontre que plus le nombre d'expériences est grand, plus la fréquence relative de l'événement est proche de la probabilité théorique).

$$p_i \approx f_i = \frac{n_i}{n}$$

avec n_i le nombre d'apparitions de l'événement e_i et *n* le nombre de fois où l'expérience est répétée.

Exemples :

a) Pour la pièce : $p(F) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$. On a bien : $p(F) + p(P) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

b) Pour les trois boules : $p(1) = p(2) = p(3) = \frac{1}{3}$.

Si par contre il y a trois boules rouges, 2 bleues et 5 vertes, $p(R) = \frac{3}{10}$, $p(B) = \frac{2}{10}$ et $p(V) = \frac{5}{10}$

c) Pour la loterie, si le disque est divisé en deux secteurs circulaires : l'un peint en rouge d'angle 120° et l'autre en bleu d'angle 240°. Alors on prend le quotient du périmètre favorable par le périmètre du disque $p(R) = \frac{\frac{120 \times 2\pi R}{360}}{2\pi R} = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{240}{360} = \frac{2}{3}$.

II. Probabilité d'un événement

On considère ici des expériences ne comportant qu'un nombre fini d'issues et on note $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *l'univers.*

1. Evénements

Définitions :

- **Un événement** A est une partie de Ω : $A \subset \Omega$
- Les événements élémentaires qui constituent A sont appelés **des événements qui réalisent (ou sont favorables) à A**
  Si $e_i \in A$ alors e_i réalise (ou est favorable) à A
- **L'événement contraire** de A est celui qui est réalisé quand A n'est pas réalisé :
  $\overline{A} = \Omega - A$ ($\overline{A}$ est le complémentaire de A)
- **L'événement certain** est Ω
- **L'événement impossible** est $\varnothing$
- Si A et B sont deux événements de Ω :
  - L'événement qui est que A ou bien B (éventuellement les deux) se produit est **la réunion de A et B**, il est noté $A \cup B$.
  - L'événement qui est que A et B se produisent tous les deux est **l'intersection de A et B**, il est noté $A \cap B$.
  - Les **événements** A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$
  - Si la réalisation d'un événement A entraîne systématiquement celle d'un événement B, on dit que A **implique** B et on note $A \subset B$.
  - Les événements A et B sont **indépendants** si la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

Exemple : Lancer d'un dé non pipé

2. Probabilité d'un événement

Définition : Si A est un événement, la probabilité que cet événement se réalise est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires constituant A. Cette probabilité est notée $p(A)$.

$$\text{Si } A=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\} \text{ alors } p(A)=\sum_{i=1}^{m} p_i$$

Conséquences :

- $0 \leq p(A) \leq 1$
- $p(\overline{A})=1-p(A)$
- $p(\Omega)=1$
- $p(\varnothing)=0$
- Si A et B sont deux événements incompatibles, la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités et la probabilité de leur intersection est égale nulle.

$$\text{Si } A\cap B=\varnothing \text{ alors } p(A\cup B)=p(A)+p(B) \text{ et } p(A\cap B)=0$$

Remarque : Si A et B sont deux événements indépendants, la probabilité de leur intersection est égale au produit de leurs probabilités : $p(A\cap B)=p(A)p(B)$

Exemples : a) Lancer d'un dé non pipé et arbre des possibles : à l'issue du lancé on regarde le nombre obtenu.

A : « Obtenir un nombre pair » $p(A)=$

B : « Obtenir un nombre strictement supérieur à 2 » $p(B)=$

$A\cap B$:

$A\cup B$:

b) Tirage de deux boules dans une urne et arbre pondéré : On tire successivement les deux boules d'une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules bleues et 1 boule verte (tirage avec remise). On considère la couleur des boules à la fin des deux tirages.

A : « Obtenir deux boules de la même couleur» $p(A)=$

B : « Obtenir une boule rouge » $p(B)=$

$A\cap B$:

$A \cup B$:

c) <u>Lancé de deux dés non pipés et tableau</u> : on considère les deux nombres obtenus à la fin des deux lancés.

A : « La somme des deux nombres est égale à 8 » $p(A) =$
B : « Les lancés donnent un même nombre » $p(B) =$

$A \cap B$:

$A \cup B$:

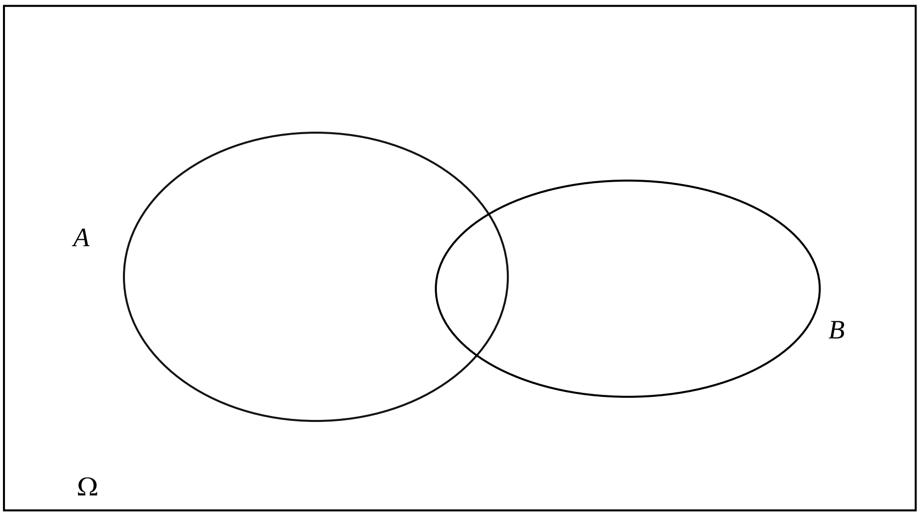
3. <u>Propriété et diagramme de Venn</u>

<u>Propriété</u> : Si A et B sont deux événements de Ω , on a la formule suivante : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

<u>Démonstration intuitive</u> :
$p(A)$ est la somme des probabilités associées aux issues qui réalisent A

$p(B)$ est la somme des probabilités associées aux issues qui réalisent B

p($A \cup B$) est la somme des probabilités associées aux issues qui réalisent $A \cup B$



Si on additionne $p(A)$ et $p(B)$, on compte deux fois les probabilités associées $A \cap B$, d'où a formule suivante :
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

<u>Propriété</u> : Si A et B sont deux événements de Ω , on a la formule suivante : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
<u>Remarque</u> : Si $A \cap B = \varnothing$ alors $p(A \cap B) = p(\varnothing) = 0$ et on retrouve la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$